

Spazio vettoriale V su di un campo K .

- $(V, +)$ gruppo commutativo ($V =$ gruppo additivo dei vettori).

$$\cdot K \times V \rightarrow V$$

$$\cdot) 1 \cdot \bar{v} = \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in V$$

$$\cdot) (\alpha + \beta) \bar{v} = \alpha \bar{v} + \beta \bar{v} \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall \bar{v} \in V$$

$$\cdot) (\alpha \beta) \cdot \bar{v} = \alpha (\beta \cdot \bar{v}) \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall \bar{v} \in V$$

$$\cdot) \alpha (\bar{v} + \bar{w}) = \alpha \cdot \bar{v} + \alpha \cdot \bar{w} \quad \forall \alpha \in K, \forall \bar{v}, \bar{w} \in V.$$

N.B. in $\alpha \bar{v} + \beta \bar{v}$ il $+$ è somma di vettori in V

in $(\alpha + \beta) \cdot \bar{v}$ il $+$ è somma di scalari in K

N.B.N. $\alpha + \bar{v}$ non ha senso con $\alpha \in K, \bar{v} \in V$.

Esempi di spazi vettoriali

1) Vettori "liberi" nel piano con norma data da legge del parallelogramma e prod. per scalare "grafico".

$$\forall \vec{v} \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{N} \quad \alpha > 0 \quad \alpha \vec{v} := \underbrace{\vec{v} + \vec{v} + \dots + \vec{v}}_{\alpha \text{ volte.}}$$

$$\alpha = 0 \quad \alpha \vec{v} := \underline{0}$$

$$\alpha < 0 \quad \alpha \vec{v} = \underbrace{(-\vec{v}) + \dots + (-\vec{v})}_{\alpha \text{ volte.}}$$

$$\alpha > 0 \quad \frac{1}{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{w} \quad \text{ove} \quad \underbrace{\vec{w} + \dots + \vec{w}}_{\alpha \text{ volte.}} = \vec{v} \quad \left| \begin{array}{l} \text{s. vett.} \\ \text{su } \mathbb{Q} \end{array} \right.$$

per estendere di numeri reali si usano acc. di Cauchy di numeri razionali $\rightarrow \alpha \in \mathbb{R}.$ $\left| \begin{array}{l} \text{s. vett.} \\ \text{su } \mathbb{R} \end{array} \right.$

$$V = S_1(\mathbb{R})$$

$$2) \mathbb{R}^2 := \{ (a, b) : a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

$$\alpha \cdot (a, b) = (\alpha a, \alpha b).$$

Def: Siano M, N $U(K)$ e $W(K)$ due sp. vettoriali sul medesimo campo K . Si dice omomorfismo di spazi vettoriali (= Applicazione lineare) una funzione

$f: V \rightarrow W$ tale che

$$1) \forall \alpha \in K \forall v \in V: f(\alpha v) = \alpha f(v)$$

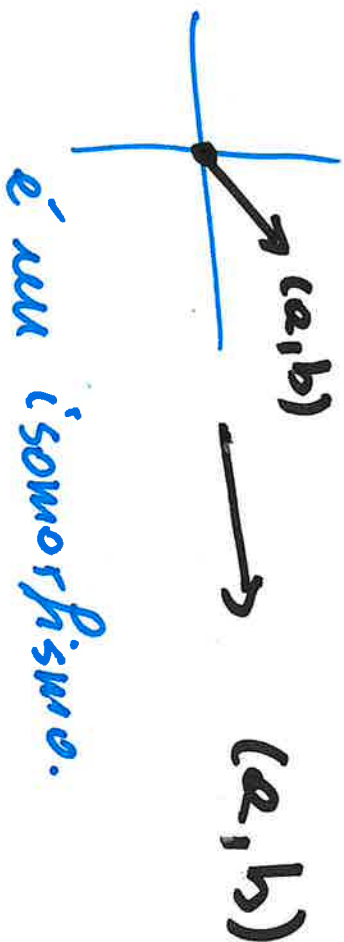
$$2) \forall \bar{u}, \bar{v} \in V: f(\bar{u} + \bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v}).$$

equivalenze

$$(*) \forall \alpha, \beta \in K, \forall \bar{u}, \bar{v} \in V: f(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha f(\bar{u}) + \beta f(\bar{v}).$$

Un omomorfismo invertibile è detto isomorfismo.

$$S_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$



è un isomorfismo.

oss: se al posto di $\mathbb{R}^2$ prendiamo $\mathbb{K}^2$ allora tutte le prop. di spazio vettoriale valgono ancora.

$$\text{ii) } \mathbb{K}^2 \text{ con } (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d) \quad \text{è v. vett.}$$

$$\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$$

$$\text{iv) } \mathbb{K}^n \text{ con } (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \quad \left| \begin{array}{l} \text{prodotto} \\ \text{di s.v.} \\ \text{fin. gen.} \end{array} \right.$$

$$\alpha(a_1, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n).$$

$$\text{5) } \mathbb{K}[x] := \left\{ f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$(f+g)(x) := \sum_i (a_i + b_i)x^i$$

$$x \quad f = \sum_i a_i x^i \quad g = \sum_i b_i x^i$$

$$(af)(x) := \sum_i (aa_i)x^i$$

sp. vettoriale di tutte le successioni definitivamente
nulla

$$|\deg = \text{grado}|$$

$$6) \quad \mathbb{K}[x]_{\leq d} := \{f(x) \in \mathbb{K}[x] \mid \deg f(x) \leq d\} = \\ = \left\{ \sum_{i=0}^d a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{K} \right\} \cong \mathbb{K}^{d+1}$$

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d \longrightarrow (a_0, a_1, \dots, a_d)$$

$$K := \mathbb{R}(y) = \left\{ \frac{f(y)}{g(y)} : f, g \in \mathbb{R}[y], g(y) \neq 0 \right\}.$$

$$K[x]_{\leq 1} = \{ a_0 + a_1 x \mid a_0, a_1 \in K \} =$$

$$= \left\{ \frac{f_0(y)}{g_0(y)} + \frac{f_1(y)}{g_1(y)} x \mid a_0, a_1 \in K \right\}.$$

Es. 7) Sia K un campo ed A un insieme.

$$V := \{ f: A \rightarrow K^n \mid f \text{ funzione} \}. \quad n \geq 1$$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall x \in A$$

$$(a f)(x) := a \cdot f(x) \quad \forall x \in A \quad \forall a \in K.$$

Software: $A = \mathbb{R} = K$ e in più f continua.

8)

$$IK^{m,n} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in K \right\}.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$IK^{m,n} \cong IK^{m,n}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow (a_{11} \dots a_{1n} \ a_{21} \dots a_{2n} \dots a_{m1} \dots a_{mn})$$

DATA UNA STRUTTURA:

- 1) quali sono le sue sottostrutture?
- 2) quali sono le pr. trasformazioni che preservano $\mathbf{K}$ il tipo di struttura? (omomorfismi).
- 3) quali sono le altre proprietà $\mathbf{K}$?

Risposta ad 1.: Sottinsiemi $X \subseteq V(\mathbf{K})$ non vuoti.

Tali che $\mathbf{M}$ gli assiomi che definiscono V con operazioni opportunamente ristretto ad X e $\mathbf{K}$ sono soddisfatti.

Proposizione: Sia $V(\mathbf{K})$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbf{K}$. Allora $\forall a \in \mathbf{K}, \forall v \in V$.

$$1) \quad a \cdot \vec{v} = \underline{0} \iff a = 0 \text{ oppure } \vec{v} = \underline{0}$$

2) Sia $(-1) \in K$ e' elemento reale che

$$(-1) + 1 = 0 \Rightarrow \forall v \in V$$

$$(-1) \cdot \bar{v} = -\bar{v}$$

Dim: risuonzi: tutto $0 \cdot \bar{v} = \underline{0}$ infatti

$$0 \cdot \bar{v} = (0+0) \cdot \bar{v} = 0 \cdot \bar{v} + 0 \cdot \bar{v}$$

possiamo a dx e rx $(-0 \cdot \bar{v})$

$$\begin{aligned} (-0 \cdot \bar{v}) + (0 \cdot \bar{v}) &= \underline{0} = (-0 \cdot \bar{v}) + (0 \cdot \bar{v}) + (0 \cdot \bar{v}) = \\ &= (0 \cdot \bar{v}). \end{aligned}$$

supponiamo $\alpha \bar{v} = \underline{0}$ con $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exists \alpha^{-1} \in K \text{ e } \alpha^{-1}(\alpha \bar{v}) &= (\alpha^{-1}\alpha) \bar{v} = 1 \cdot \bar{v} = \bar{v} \\ \text{e dunque } \bar{v} &= \alpha^{-1}(\alpha \bar{v}) = \alpha^{-1} \underline{0}. \end{aligned}$$

D'altra canto ~~che~~ $\alpha^{-1} \underline{0} = \alpha^{-1}(0+0) = \alpha^{-1} \underline{0} + \alpha^{-1} \underline{0}$

come ass. di primo $\Rightarrow \alpha^{-1} \underline{0} = \underline{0}$ $\neq$

$$2) \quad (-1)\bar{v} + \bar{v} = (-1)\bar{v} + 1\bar{v} = (-1+1)\bar{v} = 0\bar{v} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow (-1)\bar{v} + \bar{v} + (-\bar{v}) = (-1)\bar{v} = \underline{0} + (-\bar{v}) = -\bar{v} \quad \square$$

$X \neq \emptyset$

• $X \subseteq V(K)$ è detto sottospazio vettoriale di $V(K)$ se sostituendo X a V nella def dei domini e codomini delle operazioni di V abbiamo che X soddisfa ancora le prop. di sp. vettoriale.

• più formale: X è n.vettoriale rispetto le restrizioni trovate delle operazioni di V

→ in pratica: quello che serve è che se noi operiamo su elementi di X con le op. di spazio vett. ereditate da $V \Rightarrow$ restiamo in X .

oss: Serve e basta verificare che

1) $(X, +)$ sia un gruppo

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{0 \in X} \\ \left[\begin{array}{l} \forall \bar{a}, \bar{b} \in X : \bar{a} + \bar{b} \in X \\ \forall \bar{a} \in X : -\bar{a} \in X \end{array} \right] \xrightarrow{\text{impl.}} \end{array}$$

2) che $l_{K \times X}$, restrizione di $\circ : l_{K \times V} \rightarrow V \circ l_X$
abbia immagine contenuta in X

$$\bullet \forall a \in l_{K \times V} \forall \bar{a} \in X : a \bar{a} \in X$$

Proprietà di chiusura

Teorema $X \subseteq V(l_K)$, $X \neq \emptyset$ è un sottospazio di
 $V(l_K)$ e si scrive $X \leq V(l_K)$ se

e solamente se

$$(*) \quad \boxed{\forall \alpha, \beta \in l_K \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in X : \alpha \bar{a} + \beta \bar{b} \in X}$$

"X è chiuso rispetto le combinazioni
lineari dei suoi vettori."

Def: Se $X \leq V(K) \Rightarrow \forall \alpha \in K \ \forall \bar{\alpha} \in X : \alpha \bar{\alpha} \in X$
 $\forall \beta \in K \ \forall \bar{\beta} \in X : \beta \bar{\beta} \in X$

also auch $\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} \in X \Rightarrow (*)$

Viceversa: $\boxed{\forall \alpha, \beta \in K \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in X : \alpha \bar{a} + \beta \bar{b} \in X}$

$$x = q_0 + \overline{q_0} : \overline{q_0} \in X \Rightarrow A \overline{q_0} \in X \quad (1)$$
$$\begin{array}{r} 10 = \\ + \\ 10 = \\ 11 \\ 10 \\ 9 \\ \times \end{array}$$
$$-1 \leq K \Rightarrow A \bar{a}, \bar{b} \in X : X \ni y, \bar{y} \in X \Rightarrow A \bar{y}, \bar{y} \in X$$
$$3) 1 \in K \Rightarrow \forall \bar{a}, \bar{b} \in X : 1 \cdot \bar{a} + 1 \cdot \bar{b} = \bar{a} + \bar{b} \in X$$

$(X, +)$ è sottogruppo di $(V, +)$.

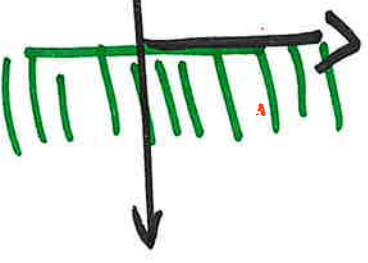
$$4) \text{ OeK } \forall a \in K \forall \bar{a}, \bar{b} \in X: a\bar{a} + 0\bar{b} = a\bar{a} \in X$$

$\Rightarrow$ l'immagine del prod per valore risultata a $1K \times X$ è contenuta in X $\square$

oss: Se $0 \notin X \Rightarrow X$ non è sottospazio!

Esempi: $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

$X := \{(a, b) : a \geq 0, b \in \mathbb{R}\}$ non è sottospazio.

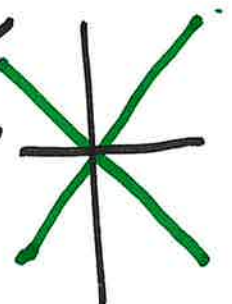


$0 \in X \quad \forall (a, b), (c, d) \in X:$

$$(a, b) + (c, d) \in X$$

$$(1, 0) \in X \text{ ma } -(1, 0) = (-1, 0) \notin X$$

$$X := \{(a, b) : a^2 - b^2 = 0\}.$$



$$0 \in X$$

$$(a, b) \in X \Rightarrow -(a, b) = (-a, -b) \in X$$

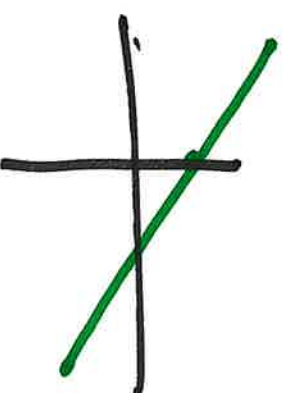
$$(1, 1) \in X, (1, -1) \in X$$

$$m_1 (1, 1) + (1, -1) = (2, 0) \notin X$$

non è sottospazio.

$$X := \{(a, b) \mid a + b = 1\}.$$

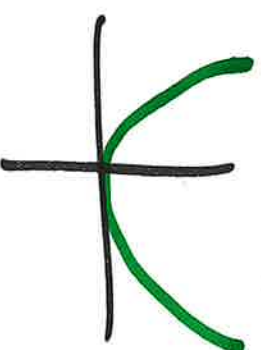
$$0 \notin X \Rightarrow \text{non è sottospazio.}$$



$$X := \{(a, a^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$$(0, 0) \in X$$

$$(1, 1) \in X \text{ ma } (-1, -1) \notin X$$



$$X = \{ (x, y) \mid ax + by = 0 \}. \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{is: } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall (x', y'), (x'', y'') \in X$$

$$\alpha(x', y') + \beta(x'', y'') \in X$$

$$\stackrel{''}{=} (\alpha x', \alpha y') + (\beta x'', \beta y'') =$$

$$= \underbrace{(\alpha x' + \beta x'')}_{x'''} , \underbrace{(\alpha y' + \beta y'')}_{y'''} \in X$$

$$\begin{aligned} a(x''') + b(y''') &= a(\alpha x' + \beta x'') + b(\alpha y' + \beta y'') \\ &= a(\alpha x') + b(\alpha y') + a(\beta x'') + b(\beta y'') \\ &= \end{aligned}$$

$$= \alpha(ax' + by') + \beta(ax'' + by'') =$$

$$\text{ma } (x', y') \in X \Rightarrow ax' + by' = 0$$

$$(x'', y'') \in X \Rightarrow ax'' + by'' = 0$$

$$\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0. \quad \square$$

$$\mathbb{R} \quad (x+y)^2 = 0$$

Es. per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ è insieme

$$\{(x, y) \mid x^2 + kxy + y^2 = 0\} \text{ e }$$

lo spazio di $\mathbb{R}^2$

$$k = \pm 2$$